

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Καραγιάννης Ιωάννης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Συλλογή

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
2001-2017

Γενικού Λυκείου

Ημερησίου-Εσπερινού-Ομογενών

2017-2018

Πρόλογος

Το παρόν αρχείο αποτελείται από όλα τα θέματα των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης και Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής που δόθηκαν μέχρι σήμερα σε Πανελλαδικές Εξετάσεις των Ημερησίων και Εσπερινών (τακτικές και επαναληπτικές) Γενικών Λυκείων καθώς και στις εξετάσεις τέκνων Ελλήνων των Εξωτερικού.

Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να ξεχωρίσουμε ότι τα θέματα από το κεφάλαιο των Μιγαδικών Αριθμών καθώς και όσα σχετίζονται με τη συνάρτηση ολοκλήρωμα στο 3^ο Κεφάλαιο (Ολοκληρωτικός Λογισμός) είναι εκτός εξεταστέας ύλης από το 2016.

Εκτιμώ ότι αυτή η συλλογή θα οργανώσει και θα διευκολύνει την μελέτη των μαθητών και των έργων των διδασκόντων.

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 . Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 7,5

A.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z \bar{z}$

β. $|z^2| = z^2$

γ. $|z| = -|\bar{z}|$

δ. $|z| = |\bar{z}|$

ε. $|i \bar{z}| = |z|$

Μονάδες 5

B.1. Αν $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $ z_1 \cdot z_2 $	α. 4
2. $ z_1^2 $	β. 2
3. $ z_2 ^2$	γ. 25
4. $-\overline{ z_1 }$	δ. -5
5. $ i z_2 $	ε. -2
	στ. 5
	ζ. 10

Μονάδες 7,5

Β.2. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|=1$, να δείξετε
 ότι $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 3 \\ \frac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\alpha = -1/9$.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4))$.

Μονάδες 7

- γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Για μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

- α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 10

- β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

- γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt) dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2xf^2(x)$

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

Μονάδες 4

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Μονάδες 4

δ. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x) \eta \mu 2x)$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[α, β]$.
Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[α, β]$, τότε να
δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

Μονάδες 12

- B.1.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$. Να δείξετε ότι η f είναι
παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f'(x) = \sigma \upsilon \nu x.$$

Μονάδες 8

- B.2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,
γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή
Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε
πρόταση.

- α.** Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[α, β]$ και
συνεχής στο $(α, β]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο
 $[α, β]$ μία μέγιστη τιμή.

Μονάδα 1

- β.** Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού
της, είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδα 1

- γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

Μονάδα 1

- δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε

$$\int f(x) dx = xf(x) - \int xf'(x) dx.$$

Μονάδα 1

- ε. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδα 1

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(v) = i^v z$, $v \in \mathbb{N}^*$.

- α. Να δείξετε ότι $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$.

Μονάδες 7

- β. Αν $|z| = \rho$ και $\text{Arg}(z) = \theta$, να δείξετε ότι

$$f(13) = \rho \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \right].$$

Μονάδες 8

- γ. Αν $|z| = 2$ και $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0 , z και $f(13)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Δίνεται ότι η σύνθεση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.

α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

Μονάδες 18

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε

και
$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx .$$

Μονάδες 2

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0 .$$

ι) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f .

Μονάδες 5

ιι) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 12

ιιι) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1) .$$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο, μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μιάμιση (1 1/2) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ , να αποδείξετε ότι:

- α.** όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- β.** κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 10

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Μονάδες 2

- β.** Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

Μονάδες 2

- γ. Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 = x_2, \text{ τότε } f(x_1) = f(x_2) .$$

Μονάδες 2

- δ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx .$$

Μονάδες 2

- Γ. Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 2ο

- α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z|=2 \text{ και } \operatorname{Im}(z) \geq 0 .$$

Μονάδες 12

- β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ) , τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{4}{z} \right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

α. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , όταν το x τείνει στο $-\infty$.

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$.

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(\sqrt{2} + 1)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) = -f(2-x) \text{ και } f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη .

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 8

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° .

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μετά τη 10.00η πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 29 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

- A. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8

- B. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 7

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.

Μονάδες 2

- β. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .
Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

Μονάδες 2

- γ. Για κάθε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 2

- δ. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

Μονάδες 2

- ε. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $w = 3z - i\bar{z} + 4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z .

- α. Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$
 $\operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha.$

Μονάδες 6

- β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$.

Μονάδες 9

- γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς $\mathbb{Z}$, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

- α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Μονάδες 6

- β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

- γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} .

Μονάδες 5

- δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x=3$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β) . Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $\delta \in (\alpha, \beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα (α,β) .

Μονάδες 8

β. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)<0$ και $f'(\xi_2)>0$.

Μονάδες 9

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μετά την 10.30' πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν
- η f είναι συνεχής στο Δ και
 - $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
- τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 9

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

- β.** Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

Μονάδες 2

- γ.** Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 2

- δ. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Μονάδες 2

- ε. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}, \text{ εφόσον } f(x) \geq 0 \text{ κοντά στο}$$

x_0 , με $k \in \mathbb{N}$ και $k \geq 2$.

Μονάδες 2

- Γ. Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, όπου $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

- α. Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 13

- β. Αν $m = 10$, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με $\operatorname{Re}(z) \neq 0$, $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ και $|\operatorname{Re}(z)| > |\operatorname{Im}(z)|$.

Αν $z + \frac{1}{z} = f(\alpha)$ και $z^2 + \frac{1}{z^2} = f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

α. $|z| = 1$

Μονάδες 11

β. $f^2(\beta) < f^2(\alpha)$

Μονάδες 5

γ. η εξίσωση $x^3 f(\alpha) + f(\beta) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^{\frac{1}{2}} 2xf(2xt) dt .$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - (x + 1)$.

Μονάδες 7

γ. Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 5

δ. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10:00.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 27 ΜΑΪΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$

Μονάδες 10

- B.** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 2

- β.** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$

Μονάδες 2

- γ.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g'(x_0)$$

Μονάδες 2

- δ. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 2

- ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 10

- β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

Μονάδες 8

- γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = f(\frac{3}{2}) = 0$.

- α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in (0, \frac{3}{2})$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$.

Μονάδες 8

β. Εάν $f(x)=2x^2-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I(\alpha)=\int_{\alpha}^0 g(x)dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha)$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1)=1$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$g(x)=\int_1^{x^3} \left| z \right| f(t)dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x-1) \geq 0,$$

όπου $z=\alpha+\beta i \in \mathbb{C}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τη g' .

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$

Μονάδες 8

γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος β να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$

Μονάδες 6

δ. Αν επιπλέον $f(2)=\alpha>0$, $f(3)=\beta$ και $\alpha>\beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:30' πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.1 Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Μονάδες 9

- A.2 Πότε μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται “1-1”;

Μονάδες 4

- B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .

Μονάδες 2

- β. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 2

- γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

Μονάδες 2

- δ. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.

Μονάδες 2

- ε. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών $z, \bar{z}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 2

- στ. Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε ισχύει:

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx .$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

- α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$$z_1 + z_2 = 4 + 4i \text{ και } 2z_1 - \bar{z}_2 = 5 + 5i ,$$

να βρείτε τους z_1, z_2 .

Μονάδες 10

- β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν $|z - 1 - 3i| \leq \sqrt{2}$ και $|w - 3 - i| \leq \sqrt{2}$:

- i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε $z = w$ και

Μονάδες 10

- ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι “1-1”.

Μονάδες 7

β. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2005)$ και $B(-2, 1)$,
να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$.

Μονάδες 9

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{1}{668}x + 2005$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005.$$

α. Να δείξετε ότι:

i. $f(0) = 0$

Μονάδες 4

ii. $f'(0) = 1$.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3.$

Μονάδες 7

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
να δείξετε ότι:

i. $xf(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 6

ii. $\int_0^1 f(x) dx < f(1).$

Μονάδες 4

ΟΛΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη **10.30'** πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta .$$

Μονάδες 9

A.2 Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ με $f(α) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (α, β)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(β) > 0$.

Μονάδες 2

β. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Μονάδες 2

- γ. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} .

Μονάδες 2

- δ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Μονάδες 2

- ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ , τότε ισχύει $\left(\int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x) - f(\alpha)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 2

- στ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

- α. Δείξτε ότι: $\overline{z_1} = \frac{9}{z_1}$.

Μονάδες 7

- β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 9

- γ. Δείξτε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3} |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 3

β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda e x$.

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M .

Μονάδες 7

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της εφαπτομένης της στο σημείο M και του άξονα $y'y$, είναι $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$.

Μονάδες 8

δ. Υπολογίστε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta \mu \lambda}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση $2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

α. Να δειχθεί ότι: $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$.

Μονάδες 6

β. Να βρεθεί το: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t) dt}{\eta \mu x}$.

Μονάδες 6

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις:

$$h(x) = \int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}.$$

Δείξτε ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, 1)$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη **10:30'** πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A.1 Να αποδείξετε ότι: $(\sin x)' = -\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

A.2 Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 5

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$\|z_1\| - \|z_2\| \leq \|z_1 + z_2\|.$$

Μονάδες 2

β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Μονάδες 2

γ. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$.

Μονάδες 2

- δ. Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

Μονάδες 2

- ε. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 9

- β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{f(x)} dx$.

Μονάδες 9

- γ. Για κάθε $x < 0$ να αποδείξετε ότι:
 $f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z , που ικανοποιούν την ισότητα $(4-z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $x=2$.

Μονάδες 7

β. Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία $x=2$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $y_0=-3$, τότε

i. να βρείτε το a και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

Μονάδες 9

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , της εφαπτομένης (ε), του άξονα $x'x$ και της ευθείας $x=\frac{3}{5}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$ με $x > 0$.

α. i. Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $x > 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 12

β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x})$.

Μονάδες 5

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $a \in (0, +\infty)$ τέτοιος ώστε $(a+1)^a = a^{a+1}$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορείτε να τα σχεδιάσετε και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30' πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1°

A.1 Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Να αποδείξετε ότι:

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 10

A.2 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ;

Μονάδες 5

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^2 = z^2$.

Μονάδες 2

β. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 2

- γ. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

- δ. Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

- ε. Ισχύει η σχέση

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx, \text{ όπου } f', g'$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$ με $x \geq 2$.

- α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

Μονάδες 6

- β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 8

- γ. i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y=x$.

Μονάδες 4

- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

Μονάδες 9

ii. $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$ με $\alpha > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Μονάδες 9

δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

Μονάδες 3

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορείτε να τα σχεδιάσετε και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

- A.1** Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

- A.2** Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 5

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

- β.** Αν f, g, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g'(x)dx.$$

Μονάδες 2

- γ.** Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ , τότε

$$\left(\int_{\alpha}^x f(t)dt \right)' = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

Μονάδες 2

- δ. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.

Μονάδες 2

- ε. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 3x}{x}, & x < 0 \\ x^2 + \alpha x + \beta \sin x, & x \geq 0. \end{cases}$$

- α. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$.

Μονάδες 8

- β. Αν $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta = 3$.

Μονάδες 9

- γ. Αν $\alpha = \beta = 3$, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x) dx$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x - e \ln x, \quad x > 0.$$

- α.** Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 10

- β.** Να αποδειχθεί ότι ισχύει $f(x) \geq e$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

- γ.** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση

$$\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)dt = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)dt + \int_2^4 f(t)dt$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \frac{2 - \bar{z}_1}{2 + \bar{z}_1}$, όπου

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$.

- α.** Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$.

Μονάδες 9

- β.** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 6

- γ.** Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta > 0$, να υπολογισθεί ο z_1 και να δειχθεί ότι

$$(z_1 + 1 + i)^{20} - (\bar{z}_1 + 1 - i)^{20} = 0.$$

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.00΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Μονάδες 8

A.2 Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

A.3 Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

B. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx > 0$.

Μονάδες 2

β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Μονάδες 2

- γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

Μονάδες 2

- δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ , τότε

$$\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Μονάδες 2

- ε. Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i} \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Μονάδες 9

- β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο

$$z = \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i}$$

για $\alpha = 0$ και $\alpha = 2$ αντίστοιχα.

- ι. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 .

Μονάδες 8

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^\nu$$

για κάθε φυσικό αριθμό ν .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$$

όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 7

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 8

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f , να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 3

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0, 1]$ για την οποία ισχύει $f(0) > 0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ για την οποία ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t) g(t) dt, \quad x \in [0, 1],$$

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

α. Ναδειχθεί ότι $F(x) > 0$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$.

Μονάδες 8

β. Να αποδειχθεί ότι:

$$f(x) \cdot G(x) > F(x)$$

για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$.

Μονάδες 6

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$$

για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$.

Μονάδες 4

δ. Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t) g(t) dt \right) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt \right)}{\left(\int_0^x g(t) dt \right) \cdot x^5}.$$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Έστω μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$.
Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να
αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Μονάδες 10

- B.** Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του
Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 5

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,
γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που
αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η
πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι
λανθασμένη.

- α.** Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν
είναι γνησίως μονότονες.

Μονάδες 2

- β.** Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ ,
τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f
σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη
γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο
επαφής τους.

Μονάδες 2

- γ.** Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα
των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

τον άξονα x' μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x' .

Μονάδες 2

δ. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε:

$$\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Μονάδες 2

ε. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$ και $\gamma = 1$.

Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι $z_1^3 = -1$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w , για τον οποίο ισχύει:

$$|w| = |z_1 - \overline{z_1}|$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2 \ln x$, $x > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

γ. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{f(x)} & , \quad x > 0 \\ k & , \quad x = 0 \end{cases}$$

i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.

Μονάδες 6

ii. Αν $k = -\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, e)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [0, +\infty),$$

$$h(x) = \frac{F(x)}{\int_0^x t f(t) dt}, \quad x \in (0, +\infty).$$

α. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{t-1}[f(t) + F(t)]dt = F(1)$

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 8

γ. Αν $h(1)=2$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t) dt < 2 \int_0^2 tf(t)dt$

Μονάδες 6

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t)dt = \frac{1}{2}F(1)$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.00' πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΜΑΪΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.1** Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

Μονάδες 10

- A.2** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 5

- B.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

- α.** Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:

$$f^{-1}(f(x)) = x, x \in A \text{ και } f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$$

Μονάδες 2

- β.** Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 2

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- γ. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών.

Μονάδες 2

- δ. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει

$$f''(x) > 0$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Μονάδες 2

- ε. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$|(i + 2\sqrt{2})z| = 6 \quad \text{και} \quad |w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)|$$

τότε να βρείτε:

- α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z .

Μονάδες 6

- β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w .

Μονάδες 7

- γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$

Μονάδες 6

- δ. την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

Μονάδες 3

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α .

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x) ,$$

για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt - 45$$

α. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$

Μονάδες 8

- β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

Μονάδες 4

- γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$$

και $g(0)=g'(0)=1$, τότε

- i. να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$

Μονάδες 10

- ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1

Μονάδες 3

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.**
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30' πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Μονάδες 9

- B.** Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

Μονάδες 6

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

Μονάδες 2

- β.** Η συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

Μονάδες 2

γ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

Μονάδες 2

δ. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{ x \mid \sin x = 0 \}$ και ισχύει

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Μονάδες 2

ε. Για κάθε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , ισχύει

$$\int f'(x) dx = f(x) + c, \quad x \in \Delta$$

όπου c είναι μια πραγματική σταθερά.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(2-i)z + (2+i)\bar{z} - 8 = 0$$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x+yi$ οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 10

- β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό z_1 και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 8

- γ. Για τους αριθμούς z_1, z_2 που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 40$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln[(\lambda+1)x^2+x+1] - \ln(x+2), \quad x > -1$$

όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \geq -1$

- Α. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ , ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 5

- Β. Έστω ότι $\lambda = -1$

- α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 10

- β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Μονάδες 6

- γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \alpha^2 = 0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha \neq 0$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται μια συνάρτηση $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = k x e^{2x}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$f'(0) = 2f(0), \quad f'(2) = 2f(2) + 12e^4, \quad f(1) = e^2$$

όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

- α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,2]$.

Μονάδες 4

- β.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi)$$

Μονάδες 6

- γ.** Να αποδείξετε ότι $k = 6$ και ότι ισχύει $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,2]$.

Μονάδες 6

- δ.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3 e^{2x}$, $0 \leq x \leq 2$

Μονάδες 5

- ε.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$$

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα. Να μη χρησιμοποιηθεί το μιλιμετρέ φύλλο του τετραδίου.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.** Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x)=0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 10

- B.** Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Μονάδες 2

- β.** Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

Μονάδες 2

γ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

Μονάδες 2

- δ. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

- ε. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- A.α.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

Μονάδες 9

- β.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

Μονάδες 8

- B.** Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0$$

όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha^x - \ln(x+1), \quad x > -1,$$

όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$

- A.** Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$

Μονάδες 8

- B.** Για $\alpha = e$,

- α.** να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Μονάδες 5

- β.** να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

Μονάδες 6

- γ.** αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta)-1}{\beta-1} + \frac{f(\gamma)-1}{\gamma-2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2]$ για την οποία ισχύει

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$H(x) = \int_0^x t f(t)dt, \quad x \in [0, 2],$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0, 2] \\ 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

- α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$.

Μονάδες 5

- β.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 2)$ και ότι ισχύει

$$G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, \quad 0 < x < 2$$

Μονάδες 6

- γ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha) = 0$.

Μονάδες 7

- δ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\alpha \int_0^\xi t f(t)dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t)dt$$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.**
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

Μονάδες 8

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, τότε ισχύει $(\alpha^x)' = x\alpha^{x-1}$

β) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε πάντοτε ισχύει $f \circ g = g \circ f$

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$,

$$\text{τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$$

ε) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν

$$z_1 + z_2 = -2 \text{ και } z_1 \cdot z_2 = 5$$

B1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2

Μονάδες 5

B2. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση

$$|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$$

να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2 + y^2 = 4$

Μονάδες 8

B3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **B2** να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει

$$2 \cdot \operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(w) = 0$$

Μονάδες 6

B4. Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος **B2** με την ιδιότητα $|w_1 - w_2| = 4$, να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 2$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3, x > 0$

Γ1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

Γ4. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος **Γ3** με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$
και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \int_0^1 f(xt) dt + x^3}{\eta\mu^3 x} = +\infty$$

Μονάδες 6

Αν επιπλέον δίνεται ότι

$$f'(x) + 2x = 2x \cdot (f(x) + x^2), \quad x \in \mathbb{R}, \text{ τότε:}$$

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = e^{x^2} - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 8

Δ4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$h(x) = \int_x^{x+2} f(t) dt, \quad x \geq 0$$

και να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση

$$\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t) dt + \int_6^4 f(t) dt < 0$$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.**
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 09.30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x)=F(x)+c, \quad c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x)=F(x)+c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6

A2. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ .

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) ,

$$\text{όπου } A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$$

δ) $(\sin x)' = \cos x, x \in \mathbb{R}$

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z + \frac{2}{z} = 2$ όπου $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$

B1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 7

B2. Να αποδείξετε ότι

$$z_1^{2010} + z_2^{2010} = 0$$

Μονάδες 6

B3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει

$$|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2|$$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 7

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **B3**, να αποδείξετε ότι $3 \leq |w| \leq 7$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$$

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $\psi\psi$.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^1 x f(x) dx$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \neq x$$

$$f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+9}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.**
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sin x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\sin x)' = \cos x$

Μονάδες 10

A2. Έστω μία συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της f στο Δ .

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z=a+bi$, $a,b \in \mathbb{R}$ ισχύει $z - \bar{z} = 2bi$

β) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z , w , οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z - i| = 1 + \operatorname{Im}(z) \quad (1)$$

$$w(\bar{w} + 3i) = i(3\bar{w} + i) \quad (2)$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4}x^2$

Μονάδες 7

B2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε τα σημεία A και B του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z , w με $z = w$.

Μονάδες 5

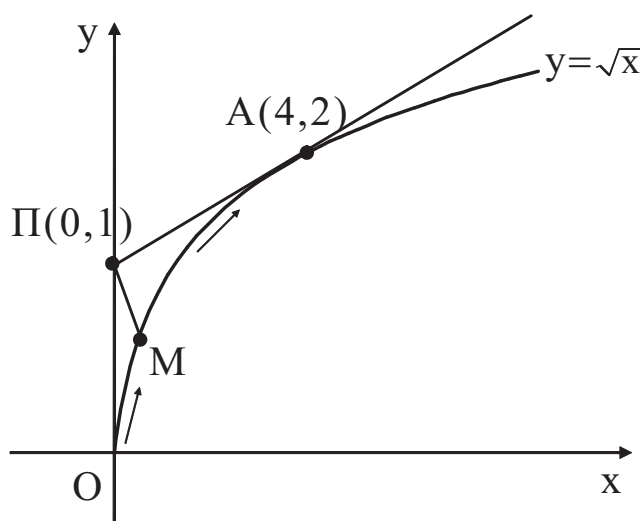
B4. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ ,

έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία K, A, Λ, B να είναι τετράγωνο.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση $\Pi(0,1)$ ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή O , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ είναι $x'(t) = 16 \text{ m/min}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο:

$$x(t) = 16t$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το $A(4,2)$ και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

Μονάδες 6

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α.

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0, \frac{1}{4})$, κατά την οποία η απόσταση $d=(ΠΜ)$ του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 8

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy .

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$

ii) $f'(0) < f(1) - f(0)$ και

iii) $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Αν επιπλέον $g(x)=f(x)-x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Δ3. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{xg(x)}$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x) dx > 2$

Μονάδες 5

Δ5. Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , τον άξονα x' και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$ είναι $E(\Omega)=e-\frac{5}{2}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 f(x) dx$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_0^{\xi} f(t) dt = 2$$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.00

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ
(ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

Μονάδες 10

A2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0 = 1$

β) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sin x = 0\}$ ισχύει: $(\epsilon \phi x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \quad \text{και} \quad w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

- B1.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

Μονάδες 7

- B2.** Να αποδείξετε ότι $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$

Μονάδες 4

- B3.** Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$

Μονάδες 8

- B4.** Να αποδείξετε ότι: $|z - w| = |z|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 8

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 3

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sin x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

i) $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$

ii)
$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$$

iii)
$$\frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 4

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$F(x) = \int_1^x f(t^2) dt$$

τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

Μονάδες 7

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 2

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 6

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f

β) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Αν είναι $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$

δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z , με $z \neq -1$, για τους οποίους ο αριθμός $w = \frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

B1. $|z|=1$

Μονάδες 7

B2. Ο αριθμός $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 6

B3. $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \leq 4$, όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z

Μονάδες 6

B4. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u , για τους οποίους ισχύει $u - ui = \frac{i}{w} - w$, $w \neq 0$, ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$xf(x) + 1 = e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2f(x) = x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει ακριβώς μία λύση.

Μονάδες 8

Γ4. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x(\ln x) \ln(f(x))]$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $A = (0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(A) = (-\infty, 0]$
- η παράγωγος της f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, και
- $2f(x) + \left(x + \frac{1}{x}\right)e^{f(x)} = \int_1^x e^{f(t)} f'(t) \left(t + \frac{1}{t}\right) dt + 2, \quad \text{για κάθε } x > 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t) dt, \quad x > 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right), \quad x > 0$

Μονάδες 8

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της F έχει μοναδικό σημείο καμπής $\Sigma(x_0, F(x_0))$, $x_0 > 0$, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_0, \beta)$ με $\beta > x_0$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο $M(\xi, F(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία

$$\varepsilon: F(\beta)x - (\beta - 1)y + 2012(\beta - 1) = 0$$

Μονάδες 6

Δ3. Αν $\beta > 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{[F(\beta) + (1 - \beta)f(\beta)]x^5}{x - 1} + \frac{(\beta - 1)(x + 1)^3}{x - 3} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα, ως προς x , στο διάστημα $(1, 3)$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \leq \int_1^x t f(t) dt, \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ
(ΟΜΑΔΑ Β΄)**

ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$;

Μονάδες 4

A3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

β) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x

γ) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

δ) $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} - \{x | \eta\mu x = 0\}$

ε) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι
συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \quad (1)$$

$$|w-5\bar{w}| = 12 \quad (2)$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$

Μονάδες 6

B2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ τότε, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$

Μονάδες 6

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1 \leq |z - w| \leq 4$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x-1$, $x>0$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Μονάδες 6

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

- Γ3.** Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0)+f(x_0)=2012$$

Μονάδες 6

- Γ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+1$ με $x>0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x>0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\ln x - x = - \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) \cdot |f(x)|$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$, $x > 0$, τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(f(x))^2 \ln \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$

Μονάδες 5

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \leq x - 1$, που ισχύει για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt, \quad x > 0,$$

όπου $\alpha > 0$, είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x) + F(3x) > 2F(2x), \text{ για κάθε } x > 0 \text{ (μονάδες 4).}$$

Μονάδες 6

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$$

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[α, β]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[α, β]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 7

- A2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Μονάδες 4

- A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2 , όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

γ) Ισχύει ότι: $|\eta \mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho=1$ (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 3$ (μονάδες 3)

Μονάδες 8

- B2.** Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, και

$$|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$\beta = -4 \quad \text{και} \quad \gamma = 5$$

Μονάδες 9

- B3.** Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **B1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί τη σχέση:

$$v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$|v| < 4$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$ και
- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(g(x)) = 1$$

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon \varphi x_0$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$
- $f(1) = 1$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x) = \int_{\alpha}^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt, \quad x \in (1, +\infty) \text{ και } \alpha > 1$$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1) = 0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2. η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο $\mathbb{R}$

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \quad (\text{μονάδες 6})$$

Μονάδες 9

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha - 1) \int_{\alpha}^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha), \quad x > 1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 8

A2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)$

(μονάδες 2)

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

(μονάδες 2)

- γ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

(μονάδες 2)

- δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

(μονάδες 2)

- ε) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ .

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

- B1.** Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 9

- B2.** Αν $z_1 = 1+i$ και $z_2 = 1-i$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = 3 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{39}$$

είναι ίσος με $-3i$

Μονάδες 8

- B3.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$$

όπου w, z_1, z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B2.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο $-\infty$.

Μονάδες 6

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = e^x (h(x) + \ln 2)$, $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$, τον άξονα $x'Ox$ και την ευθεία $x = 1$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

Δ2. Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^{2f'(x)} f(u) du = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι η $x = 0$

(μονάδες 7)

β) Ένα υλικό σημείο M ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 < 0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq x_0$ με $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του $y(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 11

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2 (x - 2)^2, \quad x \in (0, +\infty)$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c, c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ , και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c, c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Μονάδες 4

A3. Πότε η ευθεία $X=X_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $z \in \mathbb{C}$, τότε $\overline{(z^v)} = (\bar{z})^v$, όπου v θετικός ακέραιος.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ε) Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[α,β]$ και G είναι μία παράγουσα της f στο $[α,β]$, τότε πάντοτε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν:

- $|z - 3i|^2 - 18 = |z - 3|^2$
- $|w - i| = \operatorname{Im}(w) + 1$

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η ευθεία με εξίσωση $x - y - 3 = 0$

Μονάδες 9

- B2.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4}x^2$

Μονάδες 9

- B3.** Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x, x \in (0, +\infty)$

- Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με

$$g(x) = \int_1^{h(x)} \sqrt{t^2 - 1} \, dt,$$

$$\text{όπου } h(x) = f(x^2 + 1) - f(2) + 1.$$

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 1$$

έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες x_1, x_2

Μονάδες 6

Γ4. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 του ερωτήματος **Γ3** ισχύει ότι $x_1 < x_2$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_1, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(x^2 - x) \cdot f'(x) + x \cdot f(x) = 1, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^x f(t) dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{f(t)}{t} dt, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Μονάδες 4

Δ3. α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = - \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt, x \in (0, +\infty)$$

είναι κοίλη.

(μονάδες 5)

β. Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο που η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα x' και την ευθεία $x=3$. Να αποδείξετε ότι $E < 2$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 9

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{\frac{1}{x}}^x f(t) dt \geq \frac{1}{x} \int_{\frac{1}{x}}^x t f(t) dt, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[α,β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$,

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (α,β)$, τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

A2. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει πάντοτε ότι $f \circ g = g \circ f$.

β) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\sin x)' = \eta \mu x$.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

δ) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$.

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$|z - 4| = 2|z - 1|.$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=2$.

Μονάδες 7

B2. Έστω $w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$, όπου z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B1.

Να αποδείξετε ότι:

α) Ο w είναι πραγματικός και

(μονάδες 4)

β) $-4 \leq w \leq 4$.

(μονάδες 7)

Μονάδες 11

B3. Αν $w = -4$, όπου w είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος B2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τις εικόνες $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και z_3 , με $z_3 = 2iz_1$, είναι ισοσκελές.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 6

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = \frac{e^2}{5}$$

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

Μονάδες 8

- Γ3.** Να αποδείξετε ότι

$$\int_{2x}^{4x} f(t) dt < 2x f(4x)$$

για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 4

- Γ4.** Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_{2x}^{4x} f(t) dt, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) [e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $f(0) = 0$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

- Δ2.** α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

(μονάδες 3)

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την ευθεία $y = x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln |f(x)| \right].$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt}{x - 3} + \frac{8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt}{x - 2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2, 3)$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) & ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = \ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1.$

β) Αν $f(x) = \ln|x|$ για κάθε $x \neq 0$, τότε $f'(x) = \frac{1}{|x|}$ για κάθε $x \neq 0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

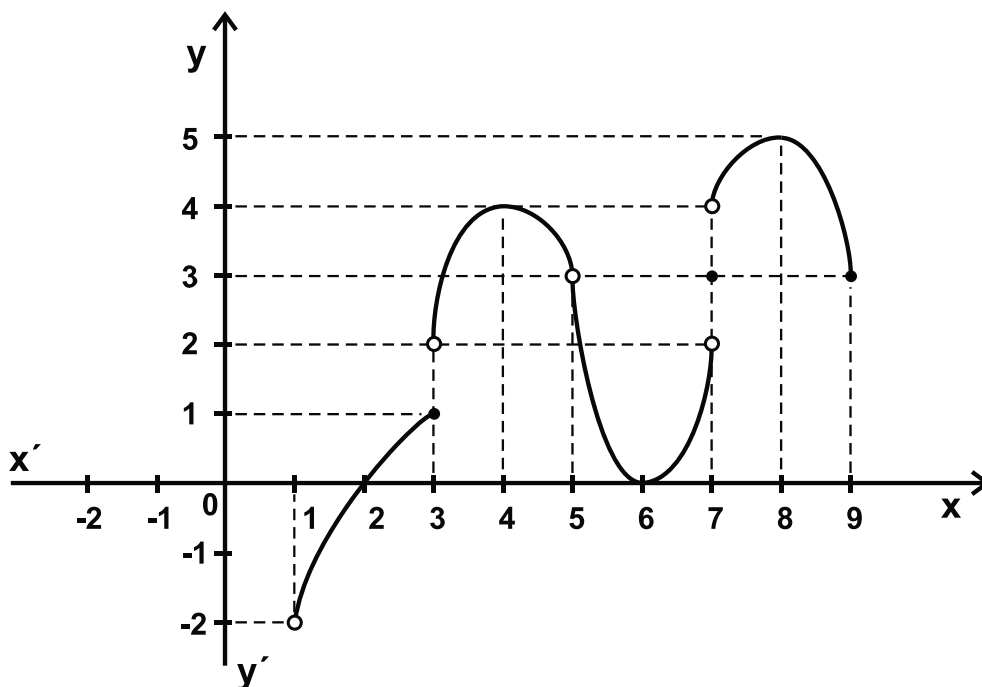
ε) Για κάθε συνάρτηση f , συνεχή στο $[a, b]$, ισχύει:

$$\text{αν } \int_a^b f(x) dx > 0, \text{ τότε } f(x) > 0 \text{ στο } [a, b].$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 2

B2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
γ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ δ) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ ε) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ β) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

B4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

B5. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 (μονάδες 2) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(ημx) > f(x - \frac{1}{6}x^3).$$

Μονάδες 9

Γ3. Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$, $x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Μονάδες 4

Γ4. Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 f(x) g(x) dx .$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1 & , 0 < x < 1 \\ 1 & , x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1} & , x > 1 \end{cases}$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ (μονάδες 3) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f . (μονάδες 2)

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι το $x_0 = 1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f .

Μονάδες 8

Δ3. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$. (μονάδες 3)

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΝΕΟ & ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = x_0$, όπου x_0 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι

$$E = \frac{-x_0^2 - 2x_0 + 2}{2}.$$

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

- Δ4.** Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1, +\infty)$ να αποδείξετε ότι
 $(x + 1)F(x) > xF(1) + F(x^2)$, για κάθε $x > 1$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 7

- A2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο x_0 , είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

- A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$;

Μονάδες 4

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 5

B2. Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

B3. Αν $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

B4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$, και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες (ε_1) , (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το A , τις οποίες και να βρείτε.

Μονάδες 8

Γ2. Αν (ε_1) : $y = -x$ και (ε_2) : $y = x - \pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1) , (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f , και να

αποδείξετε ότι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) , (ε_2) , και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi}$.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \eta \mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$

- Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, \pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

- Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

- Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τη γραφική παράσταση της g , με $g(x) = e^{5x}$, $x \in \mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = \pi$.

Μονάδες 6

- Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 17 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8,5

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Μονάδες 4

B. α) Αν $z=x+yi \neq 0$, $|z|=\rho$ και θ ένα όρισμα του z , να αποδείξετε ότι ο z παίρνει τη μορφή
 $z=\rho (\cos\theta + i\sin\theta)$

Μονάδες 8,5

β) Αν $z_1=\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2=\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ είναι η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών z_1 , z_2 και $z_1=z_2$, τότε

- | | | |
|------------------------|-----|--|
| 1) $\rho_1=\rho_2$ | και | $\theta_1+\theta_2=0$. |
| 2) $\rho_1+\rho_2=0$ | και | $\theta_1=\theta_2+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. |
| 3) $\rho_1=\rho_2$ | και | $\theta_1 - \theta_2=2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. |
| 4) $\rho_1 - \rho_2=0$ | και | $\theta_1+\theta_2=2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. |

Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = 1 - 2i \quad \text{και} \quad z_2 = 3 + 4i$$

- α) Αν $\frac{z_2}{z_1} = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $x = -1$ και $y = 2$.

Μονάδες 8

- β) Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \beta x + 2\gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, είναι η $\frac{z_2}{z_1}$, να βρείτε τις τιμές των β και γ .

Μονάδες 8

- γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει

$$|z - 2z_1| = |z_2|$$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 4 + \frac{1}{2x+4}$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 7

- β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 9

- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x=0$, $x=1$.

Μονάδες 9

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1) = 0$ και

$$x f'(x) - 2f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x f(t) dt}{(\ln x)^2}$$

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

ΘΕΜΑ 1ο

- α) Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, με πεδίο ορισμού του A .
Πότε η f λέγεται συνάρτηση 1-1;

Μονάδες 5

- β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 12

- γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (Σ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

3. $|z_1 \cdot z_2| > |z_1| \cdot |z_2|$

4. $|z_1|^2 = z_1 \cdot \overline{z_1}$

όπου $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Μονάδες 8

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & , \ x \leq -\frac{4}{3} \\ 2x+1 & , \ x > -\frac{4}{3} \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = -\frac{4}{3}$.

Μονάδες 5

β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -\frac{4}{3}$.

Μονάδες 10

γ) Για $x \neq -\frac{4}{3}$, να βρείτε την $f'(x)$ και να λύσετε την
εξίσωση $f(x) + f'(x) = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(z) = \frac{z+i}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$.

α) Αν $|f(z)| = |f(\bar{z})|$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 6

β) Αν $|f(z)| = 1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 9

γ) Αν $\operatorname{Re}(f(z)) = 2$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z , βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει $f(0)=0$ και ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$:

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιος ώστε $f(x) = x \cdot f'(\xi)$.

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x} + e^x$, $x > 0$ είναι συνάρτηση 1-1 στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 10

γ) Αν $h(x) = e^x + x^5 + x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_1^{e-1} f(x+1) dx \quad .$$

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ
ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΠΕΜΠΤΗ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

B. Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και $x_0 \in A$.

Πότε θα λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_0 (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 5

Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις Γ, Δ, Ε, ΣΤ και Ζ να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη Σ, αν η πρόταση είναι Σωστή, ή Λ, αν αυτή είναι Λανθασμένη.

Γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 2

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Δ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

Ε. Ισχύει ο τύπος $\int \eta \mu x dx = \sigma \nu x + c$

Μονάδες 2

ΣΤ. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι: Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Μονάδες 2

Ζ. Έστω μια 1-1 συνάρτηση f και C, C' οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων. Τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , x \leq 0 \\ \alpha x + \beta & , 0 < x < 1 \\ 1 + x \ln x & , x \geq 1 \end{cases} \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τα α και β έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 8

β) Αν, για τους πραγματικούς αριθμούς α και β , ισχύει: $\alpha=1$ και $\beta=0$, τότε:

ι) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

Μονάδες 9

ii) Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω z μιγαδικός αριθμός, με $z \neq \pm i$ και $w = \frac{z}{z^2 + 1}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός, τότε ο z είναι πραγματικός ή $|z| = 1$.

Μονάδες 10

β) Να λύσετε, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, την εξίσωση $\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Μονάδες 10

γ) Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{(z_1 \cdot z_2)^3 - i}{4 + (z_1 + z_2)^2}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x+1} \int_1^x f(t) dt, \quad x \in \Delta.$$

α) Να υπολογίσετε το $f(1)$.

Μονάδες 3

β) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 3x - 1$.

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=4$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιό σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 13 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

- α) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

- β) Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Τι ορίζουμε ως μέτρο του z ;

Μονάδες 5

- γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (Σ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν z μιγαδικός αριθμός και $\overline{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει

$$|z|^2 = z \overline{z}.$$

Μονάδες 2

2. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 , τότε ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|.$$

Μονάδες 2

3. Ισχύει $(\eta \mu x)' = -\sigma \upsilon \nu x$.

Μονάδες 2

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

4. Ισχύει $\int e^x dx = e^{2x} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

5. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = 3+i \text{ και } z_2 = 1-3i .$$

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{z_1}{z_2} = i$ και $|iz_1 + z_2|^2 = 0$.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $z_1^{2006} + z_2^{2006} = 0$.

Μονάδες 8

γ) Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό

$$w = \frac{kz_1 - iz_2}{z_2 - kz_2} , \quad k \in \mathbb{R} - \{1\} .$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $k \in \mathbb{R} - \{1\}$ ισχύει $\text{Im}(w) = -1$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha + e^x , & x \leq 0 \\ x \ln x , & x > 0 \end{cases} \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R} .$$

A) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Μονάδες 10

B) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha = -1$:

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

i) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Μονάδες 5

ii) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

Μονάδες 5

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x - \ln x + e^x, \quad x \in (1, +\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 6

β) Να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Μονάδες 6

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2005$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 6

δ) Έστω $\Pi = \int_2^e f(x) dx + \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x) dx$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi - 2\ln 2$.

Μονάδες 7

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 12 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$
και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Μονάδες 10

β) Έστω μία συνάρτηση f και το σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

Μονάδες 5

γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1, 2, 3, 4** και **5** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (**Σ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει :

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| .$$

Μονάδες 2

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1 = R - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει

$$f'(x) = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} .$$

Μονάδες 2

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

3. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 2

4. $\int \sin x dx = -\cos x + c$.

Μονάδες 2

5. Αν για μία συνάρτηση f , συνεχή στο διάστημα $[a, b]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω ότι για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

$$(5z-1)^5 = (z-5)^5 .$$

α) Να δείξετε ότι $|5z-1| = |z-5|$.

Μονάδες 5

β) Να δείξετε ότι: $|z|=1$.

Μονάδες 10

γ) Αν $w = 5z+1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(w)$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-5) + 2x - 12$.

α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f ;

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2006$ έχει μοναδική λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση f , για την οποία ισχύει

$$f(x) = 3 + 2 \int_0^x f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\Phi(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$ είναι σταθερή.

Μονάδες 5

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 3e^{2x}$.

Μονάδες 5

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου $E(\lambda)$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=\lambda$ με $\lambda > 0$.

Μονάδες 10

δ) Να βρεθεί το $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{E(\lambda)}{\lambda}$

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 11 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A.

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

Μονάδες 10

2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (Σ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z και κάθε θετικό ακέραιο n , ισχύει: $\left| z \right|^n = \left| z^n \right|$.

Μονάδες 2

2. Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$.

Μονάδες 2

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

3. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες 2

4. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Μονάδες 2

5. Για κάθε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ , ισχύει:

$$\int f'(x)dx = -f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=i$, $z_2=1$ και $z_3=1+i$.

- α. Να αποδείξετε ότι: $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2$.

Μονάδες 5

- β. Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z - z_1| = |z - z_2|$, τότε να αποδείξετε ότι:

i. $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$.

Μονάδες 10

- ii. για $z \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}.$$

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{1}{4x}$, $x \in (0, +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{1}{e^5}\right) > 0, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) < 0 \quad \text{και} \quad f(e^5) > 0.$$

Μονάδες 6

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$.

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

Μονάδες 4

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x) - f(x) = -4e^{-3x}$ και $f(0) = 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = e^{-x}f(x) - e^{-4x}$ είναι σταθερή.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x + \frac{1}{e^{3x}}$.

Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I(x) = \int_0^x f(t)dt$

Μονάδες 9

δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{I(x)}{x^2}$.

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

ΘΕΜΑ 1ο

A.

- α.** Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 10

- β.** Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 5

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1, 2, 3, 4** και **5** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (**Σ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή ή (**Λ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1.** Για τον μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $z = 0$ τότε και μόνον τότε, αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

Μονάδες 2

- 2.** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο A . Τότε πάντα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Μονάδες 2

- 3.** Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 2

4. Αν είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 2

5. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

- A. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = k + (k + 1)i$, $k \in \mathbb{R}$.

- α. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $y = x + 1$.

Μονάδες 6

- β. Ποιοι από αυτούς τους μιγαδικούς αριθμούς έχουν $|z|=1$;

Μονάδες 9

- B. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + 8 = (1 - i)^4\beta - (1 + i)^4\alpha$, να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -2$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$, $x > 0$.

- α. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

- β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Μονάδες 8

- γ. Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$I = \int_1^{e^2} f(x)dx.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu x$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο $(0, f(0))$ της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 10

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y = x$ και $y = 1$.

Μονάδες 10

γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει η ανισότητα $\eta\mu x > x - \frac{3}{2}x^2$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοτυπιών αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τις φωτοτυπίες.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοτυπιών.
6. Για την κατασκευή των σχημάτων σε θέματα που απαιτείται, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοτυπιών και όχι πριν την 17.00.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ Ι & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sin x = 0\}$ ισχύει

$$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Μονάδες 10

A2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$.

β. Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f , για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g .

γ. Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f .

δ. Για κάθε συνάρτηση f που είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$.

ε. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$, τότε ισχύει

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x - 1}{x + 1}$, $x \neq -1$, όπου το α είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Β1. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(3,2)$.

Μονάδες 5

Αν $\alpha = 3$ τότε:

Β2. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

Μονάδες 6

Β3. Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3-x}$, $x \neq 3$.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x-2}$, $x > 2$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $(2, +\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y = x + 1$, $x = \lambda$ και $x = \lambda + 1$ με $\lambda > 2$.

Μονάδες 8

Γ4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in (2, +\infty)$ ισχύει $E(\lambda) > \ln 2$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x \ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x$.

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x)}{e^{f(x)}}$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 17:00.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι αληθές, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι ψευδές. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (μονάδες 3)

Μονάδες 4

A3. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$, τότε

α) η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση στο (α, β) .

β) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α, β) .

γ) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α, β) .

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (α, β) .

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f

στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = G(\alpha) - G(\beta)$.

β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

γ) Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} .

δ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της h .

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h .

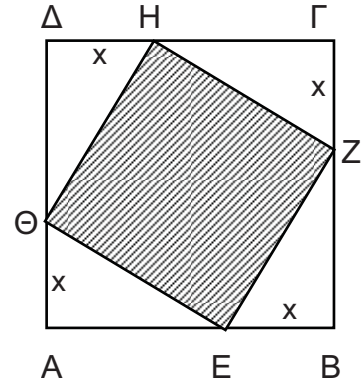
Μονάδες 5

B4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^x h(x) dx$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm . Αν το τετράγωνο $EZH\Theta$ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του $AB\Gamma\Delta$:



Γ1. Να εκφράσετε την πλευρά EZ συναρτήσει του x .

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, \quad 0 \leq x \leq 2$$

Μονάδες 4

Γ3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Μονάδες 9

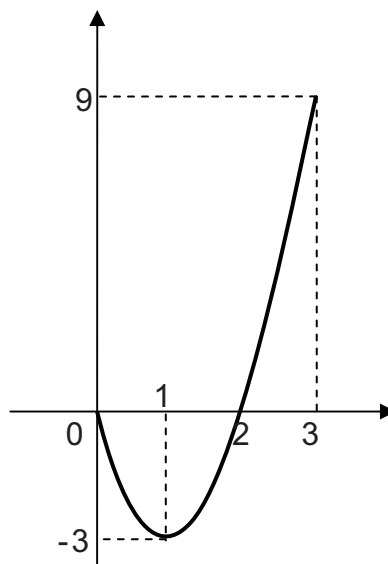
Γ4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου $EZH\Theta$ ισούται με $4e^{x_0} + 1 \text{ cm}^2$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- $f(0) = 2$, $f(1) = 0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x=0$ και $x=3$ ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0, 3]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2$, $f(2) = -2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)-2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 8

Δ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f .

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

ΘΕΜΑ 1ο

Α.α) Αν $z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ και $z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή, να αποδείξετε ότι:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)]$$

Μονάδες 6,5

β) Αν $z = \alpha + \beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, είναι ένας μιγαδικός αριθμός, να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** του επόμενου πίνακα, και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη I	Στήλη II
A. $\operatorname{Re}(z)$	1. $-\alpha - \beta i$
B. $\operatorname{Im}(z)$	2. $\alpha - \beta i$
Γ. $-z$	3. $\alpha + \beta$
Δ. $\bar{z}$	4. α
Ε. $ z $	5. $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
ΣΤ. $z \cdot \bar{z}$	6. $\alpha^2 + \beta^2$
	7. β

Μονάδες 6

B. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = i$.

α) Να γράψετε τους z_1 και z_2 σε τριγωνομετρική μορφή.

Μονάδες 8

β) Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή του γινομένου $z_1 \cdot z_2$.

Μονάδες 4,5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in \mathbf{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(3, f(3))$.

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, για την οποία ισχύει

$$2 - x^4 \leq f(x) \leq 2 + x^4, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) = 2$

Μονάδες 6

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

Μονάδες 9

γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα τουριστικό λεωφορείο έχει να διανύσει απόσταση 625 km με σταθερή ταχύτητα x km την ώρα. Σύμφωνα με τον Κώδικα Οδικής Κυκλοφορίας το μέγιστο όριο ταχύτητας είναι 90 km την ώρα. Τα καύσιμα κοστίζουν 160 δραχμές το λίτρο, η ωριαία κατανάλωση είναι $\left(5,5 + \frac{x^2}{200}\right)$ λίτρα

και η αμοιβή του οδηγού είναι 2000 δραχμές την ώρα.

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος $K(x)$ της διαδρομής είναι:

$$K(x) = \frac{1800000}{x} + 500x, \quad 0 < x \leq 90.$$

Μονάδες 12

β) Να βρείτε την ταχύτητα του λεωφορείου για την οποία το κόστος της διαδρομής γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 13

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$ και ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Μονάδες 10

B. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

1. Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, δίνεται από τον τύπο $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

3. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
4. Ο συζυγής κάθε μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, είναι ο μιγαδικός $\bar{z} = -x + yi$.
5. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ εφόσον } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

Μονάδες 15**ΘΕΜΑ 2ο**

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 5 \\ 10x - 25, & \text{αν } x \geq 5 \end{cases}$$

και το σημείο $x_0 = 5$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 5$ και να βρείτε την $f'(5)$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(5, f(5))$.

Μονάδες 4

δ. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί και $w = \frac{i(i+z)}{i-z}$ με $z \neq i$.

Να αποδείξετε ότι :

α.
$$w = \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{1-x^2-y^2}{x^2 + (y-1)^2} i,$$

Μονάδες 8

- β. αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας $\rho_1 = 1$ και

Μονάδες 8

- γ. αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας $\rho_2 = 1$.

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Μονάδες 10

Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις **B, Γ, Δ, E** και **ΣΤ**, να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

B. Αν $M_1(\alpha, \beta)$ και $M_2(\gamma, \delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 3

Γ. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\overline{\overline{z}} = -\alpha + \beta i.$$

Μονάδες 3

Δ. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = -\eta \mu x$.

Μονάδες 3

Ε. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 3

ΣΤ. Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} + 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι :

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 2, \quad ,$$

Μονάδες 10

$$\text{ii)} \quad f'(0) = 2f(0).$$

Μονάδες 5

β) Να υπολογίσετε το: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 3}{x - 2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, όπου

α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$ και ισχύει η σχέση $f(3) + 3f(1) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.

Μονάδες 9

- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, -4)$.

Μονάδες 8

- γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$x = 3 - k \quad \text{και} \quad y = 2k + 1.$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) αν $3 \operatorname{Re}(z) + 4 \operatorname{Im}(z) = 3$, τότε $k = -2$.

Μονάδες 9

- β) αν $|z - 1| = \sqrt{5}$, τότε $|z| = \sqrt{10}$.

Μονάδες 10

- γ) οι εικόνες M των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Αν $\alpha + \beta i$, $\gamma + \delta i$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\gamma + \delta i \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i$$

Μονάδες 9

- B.** Στον παρακάτω πίνακα, κάθε μιγαδικός αριθμός της **Στήλης I** είναι ίσος με ένα μόνο αριθμό της **Στήλης II** (δύο αριθμοί στη **Στήλη II** περισσεύουν).

Στήλη I	Στήλη II
A. i^1	1. $-i$
B. i^2	2. $+1$
Γ. i^3	3. i
Δ. i^4	4. -1
	5. 0
	6. 4

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** του παραπάνω πίνακα και ακριβώς δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II**, ώστε να δημιουργείται η σωστή αντιστοιχία.

Μονάδες 4

Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις Γ , Δ , E και ΣT , να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

Γ . Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$.

Μονάδες 3

Δ . Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

Μονάδες 3

E . Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Μονάδες 3

ΣT . Ο συντελεστής διεύθυνσης, λ , της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, της γραφικής παράστασης C_f μιας συνάρτησης f , παραγωγίσιμης στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι $\lambda = f'(x_0)$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση, $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 3, & x < 1 \\ 6x + k, & x \geq 1 \end{cases}$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

α . Να βρείτε την τιμή του k , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 10

- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

Μονάδες 8

- γ. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ , ώστε να ισχύει:

$$\mu \cdot f'(-5) + f'(5) + 34 = 0.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6ax + \beta$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και a, β πραγματικοί αριθμοί. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = -2$ και είναι $f(-2) = 98$.

- α. Να αποδείξετε ότι $a = -6$ και $\beta = 54$.

Μονάδες 6

- β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 9

- γ. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων της συνάρτησης f .

Μονάδες 4

- δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 2)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 i = \alpha + (1 - \alpha)i.$$

Να αποδείξετε ότι:

α. αν $\text{Im}(z) = 0$, τότε $\alpha = 1$.

Μονάδες 5

β. αν $\alpha = 0$, τότε $z^2 + 1 = 0$.

Μονάδες 5

γ. για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει: $0 \leq \alpha \leq 1$.

Μονάδες 7

δ. οι εικόνες M των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο**A.**

1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 12

2. Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

Μονάδες 3

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

1. Αν $z = x+yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$, τότε: $|\bar{z}| = |-z|$.

Μονάδες 2

2. Αν $z = \alpha + \beta i$, τότε: $z + \bar{z} = \alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

3. Αν $x \neq 0$, τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = -\infty$.

Μονάδες 2

4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Μονάδες 2

5. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} (k f(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))$, για κάθε σταθερά $k \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{x+3i}{2-i}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε το x , ώστε ο αριθμός z να είναι φανταστικός.

Μονάδες 10

- β. Αν $x = -6$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 6

- γ. Αν $x = 4$, να βρείτε το $|\bar{z}|$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 1 & , x < 1 \\ x^4 - 1 & , x \geq 1 \end{cases}$.

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

γ. Να εξετάσετε, αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1, 2]$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{kx - x^2}{4}$, $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $O(0, 0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

α. Να αποδείξετε ότι $k = 4$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο, το οποίο και να βρείτε.

Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(2, 4)$ υπάρχει μοναδικό σημείο ξ , στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στην ευθεία AB , όπου $A(2, f(2))$ και $B(4, f(4))$.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας δοθούν.
Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.**
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A.

1. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 12

2. Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Τι ορίζουμε ως μέτρο του z ;

Μονάδες 3

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

1. Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Μονάδες 2

2. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A.$$

Μονάδες 2

3. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Μονάδες 2

4. Αν z_1 και z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}.$$

Μονάδες 2

5. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z = \lambda^2 - 2 + (3 - 2\lambda)i, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad w = k + 4i, \quad k > 0.$$

Για τους z, w ισχύουν:

$$\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 0 \quad \text{και} \quad |w| = 5.$$

- α. Να αποδείξετε ότι $z = -1 + i$.

Μονάδες 8

- β. Να αποδείξετε ότι $k = 3$.

Μονάδες 8

- γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $z + \mu \bar{z} = 3i - w$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + kx^2 + 3x - 2$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$. Να αποδείξετε ότι:

α. $k = -1$.

Μονάδες 5

β. Η συνάρτηση f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 10

γ. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{(2-\alpha)x^2 - kx + 2}{x-3} \quad \text{με } \alpha, k \in \mathbb{R} \text{ και } x \neq 3.$$

α. Αν η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $k = 3$.

Μονάδες 10

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in (1, 2)$, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στον άξονα x' .

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Μονάδες 7

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή **Λ**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

- 1.** Έστω f πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Δ και $x_0 \in \Delta$. Έστω επίσης $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{τότε} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Μονάδες 3

- 2.** Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες $M(\alpha, \beta)$ και $M'(\alpha, -\beta)$ των συζυγών μιγαδικών $z = \alpha + \beta i$ και $\bar{z} = \alpha - \beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

Μονάδες 3

- 3.** Αν μια πραγματική συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες 3

4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ με πεδίο ορισμού $\Delta = [0, +\infty)$, τότε $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Μονάδες 3

5. Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται

οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 3

6. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
 - $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
- τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c.$$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \quad (1)$$

- α. Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση (1).

Μονάδες 9

- β. Αν z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = |z_1|^2 - 2|z_1 \cdot z_2| + \sqrt{13}|\bar{z}_2| + i^{2006}$.

Μονάδες 9

- γ. Αν $z_1 = 2+3i$, τότε να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z - z_1| = 5.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x + \lambda, & x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 8x + 4}{4x}, & x > 1 \end{cases}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- I. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 10

- II. Για $\lambda = 0$

- α. να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

- β. να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Για $k \in \mathbb{R}$ δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 - kx^2 + 10, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- I. Να βρεθεί η τιμή του $k \in \mathbb{R}$ για την οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

II. Για $k = 3$

α. να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

β. να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

Μονάδες 5

γ. και για κάθε $\alpha \in (14, 15)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha - 5$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

- A. 1.** Να αποδείξετε ότι: αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Μονάδες 12

- 2.** Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 5

- B.** Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή **Λ**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

- 1.** Για δύο οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς $a+bi$ και $\gamma+di$ η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματός τους ισούται με τη διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 2

- 2.** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 2

- 3.** Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Μονάδες 2

4. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 έχουν ασύμπτωτες.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|z-1+i|=|iz|$.

- α. i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων M των μιγαδικών z .

Μονάδες 10

- ii) Να βρείτε ποια από τα σημεία M απέχουν από την αρχή $O(0,0)$ απόσταση ίση με $\sqrt{5}$.

Μονάδες 10

- β. Αν $\operatorname{Re}(z)=0$, τότε να δείξετε ότι $z=-i$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}, & x < 2 \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{2(x-1)}, & x \geq 2 \end{cases}.$$

- α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

Μονάδες 12

- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(0, f(0))$.

Μονάδες 6

- γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{1}{2}x - 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται μια συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 8x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1.

Μονάδες 8

- β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια μόνο ρίζα στο $(0, 1)$.

Μονάδες 9

- γ. Αν για τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(g(x) - 3x) = f(x^2 + 2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το x_0 στο οποίο η g παρουσιάζει ελάχιστο.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Δεν θα αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A. 1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = v \cdot x^{v-1}$.

Μονάδες 10

2. Να ορίσετε πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη Σ, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή Λ, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

1. Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|z| = z \cdot \bar{z}$.

Μονάδες 2

2. Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον xx') τέμνει τη γραφική παράστασή της το πολύ σε ένα σημείο.

Μονάδες 2

3. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 2

4. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[α,β]$, τότε η f παίρνει στο $[α,β]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Μονάδες 2

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε $f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z=(\lambda-2)+2\lambda i$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z .

Μονάδες 9

- β. Αν ισχύει $z+\bar{z}=2$, να βρείτε το $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$.

Μονάδες 7

- γ. Αν $|z|=2$ και $\operatorname{Im}(z)\neq 0$, να βρείτε το λ .

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{4}{x}$, με $x>0$.

- α. Να βρείτε τα όρια

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x f(x)}{(x-2)^2}$$

Μονάδες 8

- β. Να βρείτε το σημείο M της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που απέχει από το σημείο $O(0,0)$ τη μικρότερη απόσταση.

Μονάδες 9

- γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-2x+6$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $xf(x)=x+2\eta\mu x$, τότε:

- α. Να βρείτε το $f(0)$.

Μονάδες 7

- β. Να αποδείξετε ότι $f(x)<3$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 10

- γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Δεν θα αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 28 ΜΑΪΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

- A. 1.** Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Μονάδες 7

- 2.** Έστω f μια συνάρτηση και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

Μονάδες 6

- B.** Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή **Λ**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

- 1.** Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει:
 $|z_1 + z_2| > |z_1| + |z_2|$.

Μονάδες 3

- 2.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(\eta \mu x)' = -\sigma \nu x$.

Μονάδες 3

- 3.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .

Μονάδες 3

4. Αν μια συνάρτηση f είναι

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α, β]$
 - παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα $(α, β)$ και
 - $f(α) = f(β)$
- τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $ξ ∈ (α, β)$ τέτοιο, ώστε: $f'(ξ) = 0$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση $3z^2 + λz + μ = 0$,
όπου $λ, μ$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

A. Αν ο αριθμός $z_1 = 1 + i$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι $λ = -6$, $μ = 6$ και να βρείτε τη δεύτερη ρίζα z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 14

B. Να αποδείξετε ότι:

α. $z_1^2 + z_2^2 = 0$

Μονάδες 6

β. $z_1^{2008} + z_2^{2008} = 2^{1005}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 1-x & , \quad x \leq 1 \\ (x-1)^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$

A. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι:

α. συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$

Μονάδες 8

β. παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

Μονάδες 10

Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(2, 1)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2 + 2x + k}{x}$,

όπου k είναι πραγματικός αριθμός.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 3

Β. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να βρείτε την τιμή του k .

Μονάδες 8

Γ. Για $k = 1$,

α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 8

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Δεν θα αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό.
5. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Ώρα δυνατής αποχώρησης η 8.30' απογευματινή.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 26 ΜΑΪΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

- A. 1.** Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 5

- 2.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 8

- B.** Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή **Λ**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

- 1.** $|z|^2 = z^2$, για κάθε μιγαδικό αριθμό z .

Μονάδες 3

- 2.** Η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $\alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι το σημείο $M(\alpha, \beta)$.

Μονάδες 3

- 3.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$.

Μονάδες 3

4. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α,β]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(α,β)$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ ∈ (α,β)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(ξ) = \frac{f(β) - f(α)}{β - α}.$$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = 2 + 3i \quad \text{και} \quad z_2 = (1 - i)^2 + 3i^{2009} + 1.$$

- α. Να αποδείξετε ότι $z_2 = 1 + i$.

Μονάδες 8

- β. Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $\bar{z}_1 - z_2$.

Μονάδες 7

- γ. Να εκφράσετε το πηλίκο $\frac{z_1}{z_2}$ στη μορφή $κ + λi$, όπου

$$κ, λ ∈ ℝ.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} αx^2 + β, & x ≤ 1 \\ 2x + 3, & x > 1 \end{cases} \quad \text{με } α, β ∈ ℝ.$$

- α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι $α + β = 5$.

Μονάδες 5

- β. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=4$.

Μονάδες 10

- γ. Για $\alpha=1$ και $\beta=4$, να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$, στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Για $\lambda \in \mathbb{R}$ δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^3+\lambda x^2-3x+1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- I. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$, να βρείτε την τιμή του λ .

Μονάδες 4

II. Για $\lambda = 0$

- α. να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

- β. να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες προς την ευθεία $y=9x$.

Μονάδες 8

- γ. να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-\sqrt{x}=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[α,β]$ και $f(α) \neq f(β)$, να δείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 10

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $α, β, γ, δ \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$α + βi = γ + δi \Leftrightarrow α = γ \text{ και } β = δ$$

β) Για κάθε συνάρτηση f η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f , που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$, και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f , που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

γ) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 , και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

δ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

ε) Έστω $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα διάφορα του μηδενικού. Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρανομαστή, έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < 0 < \beta$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) .

Αν ισχύει $f(\alpha) = 5\beta$ και $f(\beta) = 5\alpha$, να αποδείξετε ότι:

B1. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) .

Μονάδες 10

B2. Υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της γραφικής παράστασης C_f της f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x - 5y + 2010 = 0$

Μονάδες 10

B3. Η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{5}{2}(\alpha + \beta)$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την εξίσωση $z^2 - 6z + \gamma = 0$ με $\gamma \in \mathbb{R}$, η οποία έχει ρίζες τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 με $\text{Im}(z_1) > 0$ και $|z_1| = 5$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\gamma = 25$.

Μονάδες 8

Γ2. Αν $\gamma = 25$, να βρείτε τις ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

Μονάδες 5

Γ3. Αν για τον μιγαδικό αριθμό w ισχύει $|w - z_1| = |w - z_2|$, να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$(z_1 - 2 - 3i)^8 + (z_2 - 4 + 5i)^8$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+3)\sqrt{9-x^2}$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε την παράγωγο της f :

α. στο ανοικτό διάστημα $(-3, 3)$ (Μονάδες 3)

β. στο σημείο $x_0 = -3$ (Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

Μονάδες 9

Δ4. Να βρείτε τα ακρότατα της f .

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνο ανεξίτηλης μελάνης**.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των θεμάτων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ

ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sin x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\sin x)' = -\eta \mu x$

Μονάδες 10

A2. Έστω $M(x, y)$ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z=x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Να διατυπώσετε τον ορισμό του μέτρου του μιγαδικού αριθμού z

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $z-\bar{z}=2\beta$

β) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

- ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w , οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z - i| = 1 + \operatorname{Im}(z) \quad (1)$$

$$w(\bar{w} + 3i) = i(3\bar{w} + i) \quad (2)$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4}x^2$

Μονάδες 7

- B2.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$.

Μονάδες 7

- B3.** Να βρείτε τα σημεία A και B του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με $z = w$.

Μονάδες 5

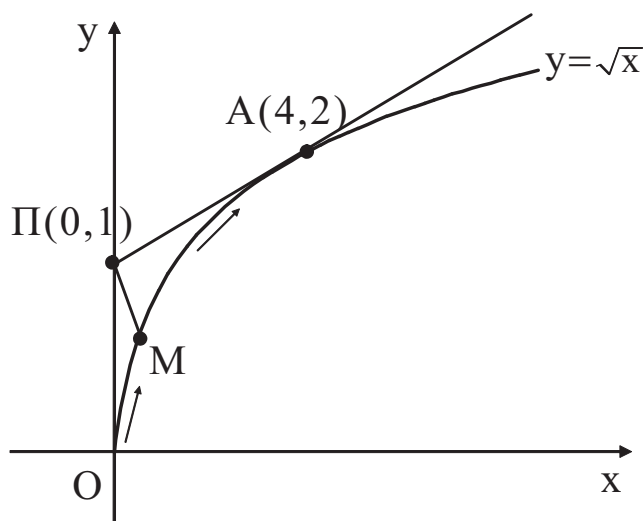
- B4.** Αν Λ είναι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $u = -i$ στο μιγαδικό επίπεδο, τότε να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία K, A, Λ, B είναι τετράγωνο.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση $\Pi(0,1)$ ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή O , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ είναι $x'(t)=16\text{m/min}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο:

$$x(t)=16t$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης, μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το $A(4,2)$ και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t , $t > 0$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του κινητού είναι 4m/min .

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0, \frac{1}{4})$, κατά την οποία η απόσταση $d=(\Pi M)$ του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 8

Να θεωρήσετε ότι το κινητό M και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy .

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{1}{x-\beta}$ όπου α, β ακέραιοι αριθμοί. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της $A(-2, \frac{5}{12})$ δέχεται εφαπτομένη της οποίας ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\frac{5}{18}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=4$.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\kappa x^3 + (1-4\kappa)x^2 - x + 4 = 0 \quad (1)$$

είναι ισοδύναμη με την $f(x)=\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και, στη συνέχεια, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.00

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

Μονάδες 10

A2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0=1$

β) Μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:
αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sin x = 0\}$ ισχύει: $(\epsilon\phi x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

- ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w , με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| = 1 \quad \text{και} \quad w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

- B1.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

Μονάδες 7

- B2.** Να αποδείξετε ότι:

$$\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$$

Μονάδες 4

- B3.** Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$

Μονάδες 8

- B4.** Να αποδείξετε ότι: $|z - w| = |z|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$, $x \neq 0$

- Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(2, f(2))$

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - 3}{x^2 - 1}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x) + x f'(x) = \eta \mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x f(x) + \sigma \upsilon \nu x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{1 - \sigma \upsilon \nu x}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } x \neq 0$$

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $1 - \sigma \upsilon \nu x = x \eta \mu x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε:

$$\xi \eta \mu \xi + \sigma \upsilon \nu \xi = 1 + \frac{2}{\pi^2} \xi^2$$

Μονάδες 7

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ

ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

Μονάδες 7

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 2

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 6

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f

β) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Για την πολυωνυμική συνάρτηση

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0 \quad \text{με } \alpha_n \neq 0$$

$$\text{ισχύει: } \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \alpha_0$$

δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

ε) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z , με $z \neq -1$, για τους

οποίους ο αριθμός $w = \frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

B1. $|z| = 1$

Μονάδες 9

B2. $\bar{z} = \frac{1}{z}$ και ότι ο αριθμός $\left(z - \frac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 8

B3. $\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \leq 4$, όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha & , \quad x < 1 \\ (x - \beta)^2 & , \quad x \geq 1 \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$

η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\beta^2 - 2\beta = \alpha$ και ότι $\alpha \geq -1$

Μονάδες 6

Γ2. Αν είναι $-1 \leq \alpha \leq 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[-1, 1]$

Μονάδες 8

Γ3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να βρείτε τα α και β

Μονάδες 6

Γ4. Αν $\alpha = \frac{5}{4}$ και $\beta = -\frac{1}{2}$, να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, f(1))$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 1)$ συνάρτηση f με $f(0) = -3$ και η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{1-x^2} f(x)$, $x \in (-1, 1)$ με $g(x) \leq \beta x - 3$, $x \in (-1, 1)$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$

Δίνεται επιπλέον ότι η παράγωγος f' της f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, 1)$

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Δ1. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινό σημείο με τετμημένη $x_0=0$ και κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι $g'(0)=\beta$ και ότι η κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0=0$ είναι η $y=\beta x-3$

Μονάδες 8

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=\beta$, $x \in (-1,1)$, έχει μοναδική ρίζα το 0

Μονάδες 4

Δ4. Να δείξετε ότι $f(x) \geq \beta x - 3$, για κάθε $x \in (-1,1)$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$;

Μονάδες 4

A3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

β) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

γ) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

δ) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε ισχύει πάντα $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$

ε) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z - 3|^2 + |z + 3|^2 = 36$$

$$|2w - 1| = |w - 2|$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 3$

Μονάδες 8

B2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{2}$, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$

Μονάδες 9

B3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x} + \alpha x^2 + \beta$, $x > 0$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Γ1. Αν είναι $\alpha < 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$

Μονάδες 4

Γ2. Αν είναι $\alpha < 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, +\infty)$

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f :

- i) έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη για κάθε α, β , την οποία και να βρείτε (μονάδες 3)
- ii) έχει οριζόντια ασύμπτωτη μόνο για $\alpha = 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$, την οποία και να βρείτε (μονάδες 3)

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο, το $f(x_0) = 7$. Στη συνέχεια να καθορίσετε το είδος του ακροτάτου αυτού.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f''(x) > -2$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta \mu x}{x^2 - x} = 2$
- $f(1) = f'(0)$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f(1) = -3$

Μονάδες 8

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Δ2. Αν η $g(x)=f(x)+\alpha(x+1)^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0,1]$, να βρείτε τον αριθμό α

Μονάδες 5

Δ3. Για $\alpha=1$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-2(\xi+1)$

Μονάδες 6

Δ4. Για $\alpha=1$ να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο ξ του προηγούμενου ερωτήματος.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 10

A2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)$

(μονάδες 2)

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

(μονάδες 2)

γ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

(μονάδες 2)

- δ) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

(μονάδες 2)

- ε) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ .

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

- B1.** Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 9

- B2.** Αν $z_1 = 1+i$ και $z_2 = 1-i$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = 3 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{39}$$

είναι ίσος με $-3i$

Μονάδες 8

- B3.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$$

όπου w, z_1, z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B2.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x-3)^2(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$

- Γ1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 8

- Γ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία

α) είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 3$

και

β) η τετμημένη του σημείου επαφής της με την γραφική παράσταση της f είναι ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 8

- Γ3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = (x-1)f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση h με $h(x) = \frac{\alpha x^2 - x + 2}{x+1}$, $x \neq -1$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, τότε

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$

Μονάδες 7

- Δ2. α)** Να εξετάσετε αν η ευθεία με εξίσωση $y = x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h και στο $-\infty$.

β) Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h .

Μονάδες 9

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x) + \frac{(x+3)^4}{x} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

- 1.** Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
- 4.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο

$$\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\} \text{ και ισχύει } (\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Μονάδες 4

A3. Πότε η ευθεία $X=X_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $z \in \mathbb{C}$, τότε $\overline{(z^v)} = (\bar{z})^v$, όπου v θετικός ακέραιος.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

ε) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x| < |x|$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν:

- $|z - 3i|^2 - 18 = |z - 3|^2$
- $|w - i| = \operatorname{Im}(w) + 1$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η ευθεία με εξίσωση $x - y - 3 = 0$

Μονάδες 9

B2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4}x^2$

Μονάδες 9

B3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ με $x \in (0, +\infty)$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g , όπου $g(x) = \sqrt{f(x) - 2}$

Μονάδες 5

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση

$$f\left(f(x) - \frac{3}{2}\right) = 2, \quad x \in (0, +\infty)$$

Μονάδες 7

- Γ4.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(0, \frac{5}{2}\right)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + \alpha x^2$, $x \in \mathbb{R}$, όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός. Αν η f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο, τότε:

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = -12$.

Μονάδες 5

- Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε τις τιμές του $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) \geq \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 8

- Δ3.** Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x^3 + 1}$ με $x \in (0, +\infty)$

Μονάδες 5

- Δ4.** Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x^v} \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

για τις διάφορες ακέραιες τιμές του v .

Μονάδες 7

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΙΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[α,β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$,

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (α,β)$, τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

A2. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει πάντοτε ότι $f \circ g = g \circ f$.
- β)** Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\sin x)' = \eta \mu x$.

δ) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$.

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$|z - 4| = 2|z - 1|.$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2$.

Μονάδες 7

B2. Έστω $w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$, όπου z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B1.

Να αποδείξετε ότι:

α) Ο w είναι πραγματικός και

(μονάδες 4)

β) $-4 \leq w \leq 4$.

(μονάδες 7)

Μονάδες 11

B3. Αν $w = -4$, όπου w είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος B2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τις εικόνες $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και z_3 , με $z_3 = 2iz_1$, είναι ισοσκελές.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(f(x)) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x}.$$

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε τις εξισώσεις όλων των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που διέρχονται από το σημείο $(3,0)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$xf(x) + \sin x = 1 - x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin x}{x} - x \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Μονάδες 6

Δ2. Να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(x)$ της συνάρτησης f για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = -1$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\frac{1}{\pi}, +\infty)$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) & ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = \ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1.$

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

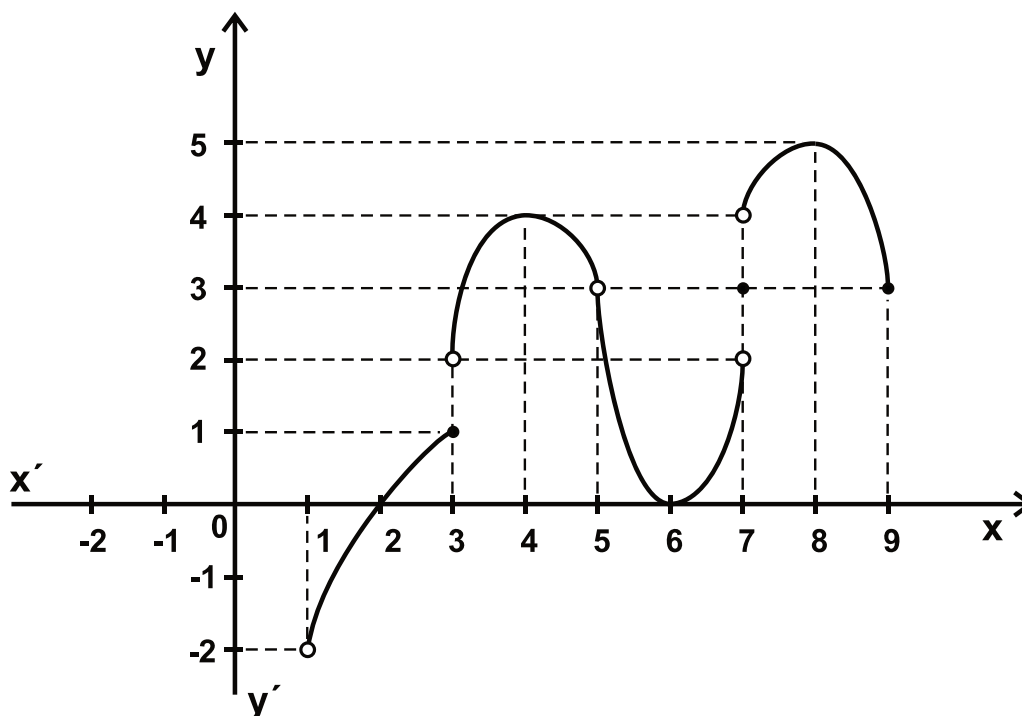
δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$, όπου O η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 2

B2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

δ) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$

ε) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$

β) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

B4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

B5. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & , x \leq 0 \\ -x + 1 & , x > 0 \end{cases}$$

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f .

Μονάδες 8

Γ2. Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση f ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[-1, 1]$.

Μονάδες 8

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0, \frac{5}{4})$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 (μονάδες 2) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} . (μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(\eta\mu x) > f(x - \frac{1}{6}x^3).$$

Μονάδες 9

Δ3. Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$, $x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Μονάδες 4

Δ4. Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση:

$$f\left(\frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 2}}\right) = f(x).$$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ